NOVEMBER/DECEMBER 2025

23UMA52 — REAL ANALYSIS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Define Closed Set.

   மூடிய கணத்தை வரையறு.

2. Define Connected Set.

   இணைந்த கணத்தை வரையறு.



3. Define Uniform Continuity.

   சீரான தொடர்ச்சியை வரையறு.

4. Define Complete Metric Space.

   முழுமையாக யாப்பு வெளியை வரையறு.

5. Define Riemann integral.

   ரீமான் தொகையீடு என்றால் என்ன?

6. Define Sets of measure zero.

   பூஜ்ஜிய அளவுள்ள கணங்கள் என்றால் என்ன?

7. State the law of mean.
சராசரி மதிப்பு விதியை கூறுக.

8. Show that $f(x) = x^2$ is derivable in [0, 1].

$f(x) = x^2$ என்பது [0, 1]இல் வகையிடத்தக்கது என்பதைக் காட்டுக.

9. Define Pointwise Convergence.
புள்ளிவழி ஒருங்குதலை வரையறு.

10. Define Uniform Convergence.
சீரான ஒருங்குதலை வரையறு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If $f: R' \to R'$ for any $r > 0$ let E_r be the set of all $a \in R'$ such that $w[f, a] \geq \frac{1}{r}$ then E_r is closed.
ஒரு சார்பு $f: R' \to R'$ மற்றும் ஏதேனும் ஒரு $r > 0$ க்கு $w[f, a] \geq \frac{1}{r}$ என்றவாறு உள்ள அனைத்து $a \in R'$ இன் கணம் E_r எனில் E_r ஒரு மூடிய கணம் என்பதை நிரூபி.

Or

18. If $f \in R[a, b]$ and $a < c < b$ then $f \in R[a, c]^*, f \in R[c, b]$ and $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

$f \in R[a, b]$ மற்றும் $a < c < b$ எனில், $f \in R[a, c]^*, f \in R[c, b]$ மற்றும் $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ என்பதை நிரூபி.

19. State and prove fundamental theorem of calculus.
நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைக் கோட்பாட்டை எழுதி அதை நிரூபி.

20. State and prove Taylor's Theorem.
டெய்லர் தேற்றத்தை எழுதி அதை நிரூபி.

(b) Prove that the sequence of functions $f_n:(0,1)\to R$ defined by $f_n(x)=\dfrac{n}{nx+1}$ cannot converge uniformly on (0, 1).

$f_n(x)=\dfrac{n}{nx+1}$ என வரையறுக்கப்பட்ட $f_n:(0,1)\to R$ என்னும் சார்புகளின் தொடர்வரிசை (0, 1)இல் சீராக ஒருங்காது என்பதை நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

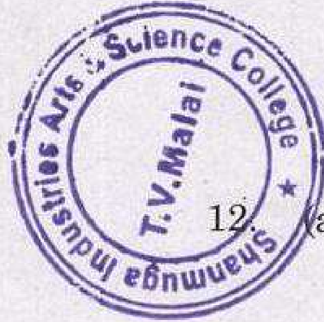
Answer any THREE questions.

16. The subset A of R' is connected if and only if whenever $a\in A$, $b\in A$ with $a<b$ then $c\in A$ for any c such that $a<c<b$.

எந்த $a\in A$, $b\in A$ உம் $a<b$ என்று இருந்தால், எந்த ஒரு $c\in A$ க்கும் $a<c<b$ ஆக இருக்கும் எனில் R' இன் உட்கணம் A இணைந்ததாக இருக்கிறதென்பதை நிரூபி.

17. If the subset A of a metric space $\langle m,\rho\rangle$ is totally bounded then A is bounded.

ஒரு யாப்பு வெளியின் உட்கணம் A முற்றிலும் $\langle m,\rho\rangle$ வரம்புடையதாக இருந்தால், A என்பது வரம்புடையது என நிறுவுக.



(b) If A_1 and A_2 are connected subsets of a metric space M and if $A_1\cap A_2\neq\phi$, then $A_1\cup A_2$ is also connected.

M என்னும் ஒரு யாப்பு வெளியின் இணைந்த உட்கணங்கள் A_1 மற்றும் A_2 ஆக இருந்து, $A_1\cap A_2\neq\phi$ எனில், $A_1\cup A_2$ உம் இணைந்த கணம் ஆகும் என்பதை நிரூபி.

12. (a) Let M be a metric space M is complete if for every sequence (F_n) of nonempty closed subsets of M such that $F_1\supseteq F_2\supseteq\ldots\supseteq F_n\supseteq\ldots$ then $\cap F_n$ is non empty.

M என்பது ஒரு யாப்பு வெளி. M-இன் உள் வெற்றிடமில்லா மூடிய உட்கணங்கள் எந்த (F_n) வரிசைக்கும் $F_1\supseteq F_2\supseteq\ldots\supseteq F_n\supseteq\ldots$ என ஆகும் போது M என்பது முழுமையானது என்று கூறப்படும். அப்போது $\cap F_n$ என்பது வெற்று அல்லாததாக இருக்கும் என்பதை நிரூபி.

Or

(b) The metric space $\langle M, \rho \rangle$ is compact if every sequence of points in M has a subsequence converging to a point in M.

ஒரு யாப்பு வெளி $\langle M, \rho \rangle$ கச்சிதமானது எனில் அதில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளித் தொடர்வரிசைக்கும் M க்குள் ஒரு புள்ளிக்கு ஒருங்கும் ஒரு உட்தொடர்வரிசை இருக்கும் என்பதை நிரூபி.

13. (a) If each of the subsets $E_1, E_2, \ldots$ of R^1 is of measure zero, then $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ is also of measure zero.

R^1 இன் $E_1, E_2, \ldots$ என்னும் ஒவ்வொரு உட்கணமும் பூஜ்ஜிய அளவுடையதாக இருந்தால் $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ உம் பூஜ்ஜிய அளவுடையது என்பதை நிரூபி.

Or

(b) If $f \in R[a, b]$ then $|f| \in R[a, b]$ and $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

$f \in R[a, b]$ எனில் $|f| \in R[a, b]$ மற்றும் $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ என்பதை நிரூபி.

14. (a) State and prove Rolle's theorem.

ரோலின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

Or

(b) If f has a derivative at every point of $[a, b]$ then f' takes on every value between $f'(a)$ and $f'(b)$.

ஒரு சார்பு f ஆனது $[a, b]$ இன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகையிடத்தக்கதாக இருந்தால் $f'(a)$ மற்றும் $f'(b)$ க்கு இடையில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பையும் அது அடையும் என்பதை நிறுவுக.

15. (a) If $f_n : A \to R$ is bounded on A for every $n \in N$ and $f_n \to f$ if uniformly on A then $f : A \to R$ is bounded on A.

$f_n : A \to R$ என்பவை ஒவ்வொரு $n \in N$ க்கும் வரம்பு கொண்டவை எனில், மற்றும் $f_n \to f$ என்பது A மீது சீரான ஒருங்கும் எனில் $f : A \to R$ என்பது A மீது வரம்பு கொண்டது என்பதை நிரூபி.

Or